

INERCIA DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA: EXPLICADA MEDIANTE CÁLCULO AVANZADO

*GEOMETRY AND INERTIA OF THE EARTH'S
ROTATION: EXPLAINED WITH ADVANCED CALCULUS*

*INÉRCIA DA ROTAÇÃO DA TERRA: EXPLICADA POR
MEIO DE CÁLCULO AVANÇADO*

AUTORES

José Luis Pinedo Vega

Universidad Autónoma de Zacatecas

Daniel Hernández Ramírez

Universidad Autónoma de Zacatecas

Fernando de la Torre Aguilar

Universidad Autónoma de Zacatecas

Vol. 4 N° 4

Octubre - Diciembre

2025



Redilat

Red de Investigadores
Latinoamericanos

Inercia de la Rotación de la Tierra: Explicada Mediante Cálculo Avanzado

Geometry and Inertia of the Earth's Rotation: Explained With Advanced Calculus

Inércia da Rotação da Terra: Explicada por Meio de Cálculo Avançado

José Luis Pinedo Vega

jlpinedo@uaz.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0001-7884-3321>

Universidad Autónoma de Zacatecas

Daniel Hernández Ramírez

dhernandez@uaz.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0003-4281-1496>

Universidad Autónoma de Zacatecas

Fernando de la Torre Aguilar

fernandodelatorre@uaz.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0002-0167-3616>

Universidad Autónoma de Zacatecas

RESUMEN

Se presenta una aplicación de las matemáticas para explicar una de las enigmáticas propiedades macroscópicas de la Tierra, la inercia en el movimiento de rotación. Para ello en forma secuencial se presenta la utilidad de las ecuaciones paramétricas de línea en el cálculo del perímetro de la Tierra. Se presenta la utilidad de las ecuaciones paramétricas de superficie en el cálculo de la de superficie, y en el cálculo de vectores ortogonales a la superficie, mismos que permiten calcular un vector normal a la superficie. Utilizando las Integrales del Línea y paralelamente el Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss, se calcula el flujo gravitacional y se demuestra que la Tierra no requiere ningún trabajo para portar todos o cualquier objeto que permanezca sobre su superficie. Finalmente, utilizando integrales de línea y paralelamente el Teorema de Stokes se demuestra que la circulación de campo gravitacional de la Tierra es cero, lo que evidencia la inercia en la rotación de la Tierra.

Palabras claves: ecuaciones paramétricas, integrales de línea, integrales de superficie, teorema de la divergencia, teorema de Stokes



ABSTRACT

An application of mathematics is shown to explain one of the enigmatic macroscopic properties of the Earth, inertia in rotational motion. To do this, sequentially, the following are presented: the usefulness of parametric linear equations in calculating the perimeter of the Earth; the usefulness of parametric surface equations in the calculation of the surface equation, and in the calculation of vectors orthogonal to its surface, which allow the calculation of a vector normal to the surface. Using Line Integrals and in parallel the Divergence Theorem or Gauss's Theorem, the gravitational flow is calculated and it is shown that the Earth does not require any work to transport all or any object that remains on its surface. Finally, using line integrals and in parallel with Stokes' Theorem, it is shown that the circulation of the Earth's gravitational field is zero, demonstrating the inertia in the Earth's rotation.

Keywords: parametric equations, line integrals, surface integrals, gauss divergence theorem, stokes theorem

RESUMO

Apresenta-se uma aplicação da matemática para explicar uma das enigmáticas propriedades macroscópicas da Terra: a inércia no movimento de rotação. Para isso, de forma sequencial, expõe-se a utilidade das equações paramétricas de linha no cálculo do perímetro da Terra. Em seguida, apresenta-se a utilidade das equações paramétricas de superfície no cálculo da área da superfície e na determinação de vetores ortogonais à superfície, os quais permitem calcular um vetor normal à superfície. Utilizando integrais de linha e, paralelamente, o Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss, calcula-se o fluxo gravitacional e demonstra-se que a Terra não requer nenhum trabalho para sustentar todo e qualquer objeto que permaneça sobre sua superfície. Por fim, utilizando integrais de linha e, paralelamente, o Teorema de Stokes, demonstra-se que a circulação do campo gravitacional da Terra é zero, o que evidencia a inércia na rotação da Terra.

Palavras chave: equações paramétricas, integrais de linha, integrais de superfície, teorema da divergência, teorema de Stokes



Funciones paramétricas

La Tierra se puede considerar cuasi-esférica, es decir, una esfera de radio R . Cada punto (x, y, z) de la superficie de la Tierra, es más práctico representarlo de coordenadas esféricas, cuyas relaciones de conversión son

$$x(\phi, \theta) = R \sin \phi \cos \theta \quad (1)$$

$$y(\phi, \theta) = R \sin \phi \sin \theta \quad (2)$$

$$z(\phi, \theta) = R \cos \phi \quad (3)$$

donde ϕ es el ángulo cenital, que comienza en el Polo Norte, que va de $0 \leq \phi \leq \pi$ y representa la latitud; y θ es el ángulo azimutal, que representa la longitud y que comienza en el meridiano de Greenwich y va de $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Como es bien sabido la ecuación estándar de una esfera es $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Para demostrar la coherencia de las coordenadas esféricas, se sustituyen las relaciones de conversión de coordenadas esféricas a cartesianas, y se puede fácilmente verificar que, en efecto

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \phi = \\ &= R^2 \sin^2 \phi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + R^2 \cos^2 \phi = R^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = R^2 \end{aligned}$$

Perímetro de la Tierra en el Ecuador

Un objeto o una persona sobre el Ecuador, está en el ángulo cenital $\phi = \pi/2$ y por tanto sustituyendo en las relaciones anteriores, sus coordenadas son

$$x(\theta) = R \cos \theta \quad (1')$$

$$y(\theta) = R \sin \theta \quad (2')$$

$$z(\theta) = 0 \quad (3')$$

A priori, se puede establecer que, como resultado de la rotación de la Tierra, todo objeto o persona, en el Ecuador, recorre cada día una distancia equivalente al perímetro de la Tierra. La posición de ese objeto puede ser descrita mediante una función posición en forma paramétrica



$$\vec{r}(\theta) = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \quad (4)$$

donde θ es el ángulo azimutal, y representa la longitud.

Para verificar la coherencia de tal función, se puede calcular la distancia de la trayectoria descrita. Para ello, se puede utilizar la fórmula o expresión de la longitud de arco en forma paramétrica

$$s = \int_C \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta \quad (5)$$

A partir de la ec. (4), derivando se obtiene

$$\vec{r}'(\theta) = -R \sin \theta \hat{i} + R \cos \theta \hat{j} \quad (6)$$

de donde, de acuerdo a la forma de las ecuaciones paramétricas, se puede inferir que

$$x'(\theta) = -R \sin \theta \quad (7)$$

$$y'(\theta) = R \cos \theta \quad (8)$$

Luego, sustituyendo en la ec. (5) e integrando

$$\begin{aligned} s &= \int_C \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-R \sin \theta]^2 + [R \cos \theta]^2} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R \end{aligned} \quad (9)$$

Que demuestra que, efectivamente, la trayectoria equivale a la fórmula del perímetro de una circunferencia, y por tanto que una función vectorial describe en forma completa una trayectoria.

Asumiendo que el radio de la Tierra es del orden de 6500km , el perímetro de la Tierra resulta del orden de

$$s = 2\pi \cdot 6500\text{km} = 40\,840\text{ km}$$

Lo que implica que un objeto o una persona en el Ecuador, sin apercibirlo, recorre esa distancia en 24 h, a una velocidad lineal del orden de



$$v = \frac{s}{t} = \frac{40\,840\text{ km}}{24\text{ h}} = 1701 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Superficie de la Tierra

Si considerada la Tierra como una esfera, cada punto de la superficie de la Tierra puede representarse como una función paramétrica de la forma

$$\vec{r}(\phi, \theta) = x(\phi, \theta)\hat{i} + y(\phi, \theta)\hat{j} + z(\phi, \theta)\hat{k} \quad (10)$$

Esto es, $\vec{r}(\phi, \theta)$ es un vector posición que puede tener como referencia el centro de la Tierra.

Utilizando las coordenadas esféricas (ecs. 1,2,3), la ecuación de la esfera en forma paramétrica es

$$\vec{r}(\phi, \theta) = R \sin\phi \cos\theta \hat{i} + R \sin\phi \sin\theta \hat{j} + R \cos\phi \hat{k} \quad (11)$$

De acuerdo al Calculo Vectorial, cualquier superficie curva, se puede calcular en coordenadas esféricas utilizando la fórmula de la longitud de arco

$$S = \iint_R \|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\| dA \quad (12)$$

donde $\vec{r}_\phi(x, y, z)$ y $\vec{r}_\theta(x, y, z)$ son vectores unitarios ortogonales a la superficie en las direcciones ϕ y θ ; $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta$ es el producto vectorial entre ambos vectores, $\|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\|$ es la magnitud del producto vectorial y $dA = d\phi d\theta$ es la diferencial de área que forma el paralelogramo de ambos vectores.

Ambos vectores ortogonales se calculan derivando respecto a sendas coordenadas. Esto es

$$\vec{r}_\phi(x, y, z) = \frac{\partial x}{\partial \phi} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \hat{k} \quad (13)$$

$$\vec{r}_\theta(x, y, z) = \frac{\partial x}{\partial \theta} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \hat{k} \quad (14)$$

Ahora bien, derivando la ec. (11) respecto a ϕ y sustituyendo en la ec. (13)

$$\vec{r}_\phi(\phi, \theta) = R \cos\phi \cos\theta \hat{i} + R \cos\phi \sin\theta \hat{j} - R \sin\phi \hat{k} \quad (15)$$



Y de forma similar, derivando respecto a θ la ec. (11) y sustituyendo en la ec. (14)

$$\vec{r}_\theta(\phi, \theta) = -R \sin \phi \sin \theta \hat{i} + R \sin \phi \cos \theta \hat{j} + 0 \quad (16)$$

Para utilizar la ec. (12) se requiere, primero calcular el producto vectorial $\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta$. Esto es

$$\begin{aligned} \vec{r}_\phi(\phi, \theta) \times \vec{r}_\theta(\phi, \theta) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ R \cos \phi \cos \theta & R \cos \phi \sin \theta & -R \sin \phi \\ -R \sin \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= R^2 (\sin^2 \phi \cos \theta \hat{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \hat{j} + \sin \phi \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \hat{k}) = \\ &= R^2 (\sin^2 \phi \cos \theta \hat{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \hat{j} + \sin \phi \cos \theta \hat{k}) \quad (17) \end{aligned}$$

enseguida, como es bien sabido, el cálculo de la magnitud del producto cruz $\|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\|$ es la raíz cuadrada del cuadrado de las componentes del producto vectorial. Esto es

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_\phi(\phi, \theta) \times \vec{r}_\theta(\phi, \theta)\| &= \sqrt{R^4 (\sin^4 \phi \cos^2 \theta + \sin^4 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos^2 \phi)} = \\ &= \sqrt{R^4 (\sin^4 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \phi \cos^2 \phi)} = \\ &= \sqrt{R^4 (\sin^4 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \phi)} = \sqrt{R^4 \sin^2 \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} = \sqrt{R^4 (\sin^2 \phi)} \\ &= R^2 \sin \phi \quad (18) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo la ec. (18) en la ec. (12)

$$S = \iint_D \|\vec{r}_\phi(\phi, \theta) \times \vec{r}_\theta(\phi, \theta)\| dA = \iint_D R^2 \sin \phi d\phi d\theta \quad (19)$$

hay que recordar que $dA = d\phi d\theta$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$. Por tanto

$$= R^2 \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = R^2 [-\cos \phi]_0^\pi [\theta]_0^{2\pi} = 4\pi R^2 \quad (19)$$

que es la ecuación o fórmula de la superficie de una esfera. Lo que demuestra la utilidad de las ecuaciones paramétricas de una superficie.

Flujo gravitacional que emana de la superficie de la Tierra

El flujo perpendicular a una superficie diferencial Φ matemáticamente se define mediante la integral de superficie



$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} ds \quad (20)$$

donde, F es el campo que induce el flujo -en el caso de la Tierra, es el campo gravitacional-, N es el vector normal a la superficie, y D es el dominio de la función -en el caso de la tierra, es la circunferencia que la divide en hemisferios-.

De acuerdo a la Ley de Gravitación Universal, la interacción entre dos masas M y m separadas una distancia R , esta dada por la función vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{GMm}{R^2} \vec{u} = \frac{GMm}{R^2} \frac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{R} = \frac{k}{R^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (21)$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$ es la constante de gravitación universal, $k = GMm$ y $\vec{u}$ el vector unitario en la dirección del campo $\vec{F}$.

En el caso de la interacción de la Tierra sobre cualquier objeto en su superficie, M es la masa de Tierra $M = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$ y m puede ser un objeto de masa unitaria.

Para resolver la integral ec. (20) lo primero que se tiene que calcular es el valor de $\vec{N}ds$. De acuerdo al Calculo Vectorial

$$\vec{N}ds = \vec{r}_\phi(\phi, \theta) \times \vec{r}_\theta(\phi, \theta) dA \quad (22)$$

Utilizando el producto vectorial, ec. (17)

$$\vec{N}ds = R^2 (\sin^2 \phi \cos \theta \hat{i} + \sin^2 \phi \sin \theta \hat{j} + \sin \phi \cos \theta \hat{k}) dA \quad (23)$$

Por su parte, sustituyendo las relaciones de conversión (1), (2) y (3), en la ec. (21) el campo gravitacional $\vec{F}$ en forma paramétrica resulta

$$\vec{F}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = \frac{k}{R^3} (R \sin \phi \cos \theta \hat{i} + R \sin \phi \sin \theta \hat{j} + \cos \phi \hat{k}) \quad (24)$$

Luego, el producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{N}ds$ resulta



$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \vec{N} ds &= \frac{k}{R^3} (R \sin\varnothing \cos\theta \hat{i} + R \sin\varnothing \cos\theta \hat{j} + \cos\varnothing \hat{k}) \\
&\cdot R^2 (\sin^2\varnothing \cos\theta \hat{i} + \sin^2\varnothing \sin\theta \hat{j} + \sin\varnothing \cos\theta \hat{k}) dA = \\
&= k (\sin^3\varnothing \cos^2\theta + \sin^3\varnothing \sin^2\theta + \sin\varnothing \cos^2\varnothing) dA = \\
&= k (\sin^3\varnothing (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \sin\varnothing \cos^2\varnothing) dA = \\
&= k (\sin\varnothing (\sin^2\varnothing + \cos^2\varnothing)) dA = k \sin\varnothing dA = \\
&= k \sin\varnothing d\varnothing d\theta \quad (25)
\end{aligned}$$

Y substituyendo la ec. (25) en la ec. (20), el flujo gravitacional que emana de la superficie de la Tierra

$$\Phi = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} ds = k \int_0^\pi \sin\varnothing d\varnothing \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi k \quad (26)$$

resultado que demuestra que el flujo es independiente de la distancia R y, en el caso de que m sea un objeto de masa unitaria, el flujo estrictamente depende y es proporcional a M .

En el caso de la Tierra, el valor numérico del flujo gravitacional total, es

$$\begin{aligned}
\Phi &= 4\pi k = 4\pi GMm = 4\pi \left(6.69 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (5.972 \times 10^{24} kg) (1 kg) \\
&= 5.02 \times 10^{15} Nm^2 \quad (25)
\end{aligned}$$

Si se quiere calcular el flujo que pasa por cada m^2 de superficie de la Tierra, sobre una masa unitaria, hay que dividir entre superficie de la Tierra ($S = 4\pi R^2$). Esto es

$$\frac{\Phi}{S} = \frac{4\pi GMm}{4\pi R^2} = \frac{GMm}{R^2} = \frac{\left(6.69 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right) (5.972 \times 10^{24} kg)}{(6.5 \times 10^6 m)^2} = 0.946 N$$

Calculo del Flujo gravitacional utilizando el Teorema de Gauss

Alternativamente, el Flujo se puede calcular usando el Teorema de la Divergencia de Gauss

$$\iiint_R \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iiint_V \text{div} F dV \quad (27)$$

Para ello es necesario calcular la divergencia de F ($\text{div} \vec{F}$).



De acuerdo al Calculo Vectorial, si

$$\vec{F}(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k} \quad (28)$$

por definición

$$\text{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot (M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (29)$$

Observando la ec. (21) es evidente que

$$M = \frac{k}{R^3}x; \quad N = \frac{k}{R^3}y; \quad y \quad P = \frac{k}{R^3}z \quad (30)$$

Por tanto

$$\text{div}\vec{F} = \frac{k}{R^3}(1 + 1 + 1) = \frac{3k}{R^3} \quad (31)$$

Luego, sustituyendo en la ec. (27)

$$\iiint_V \text{div}\vec{F} dV = \frac{3k}{R^3} \iiint_V dV \quad (32)$$

Como es bien sabido, una integral triple anula una diferencial de volumen. Esto es $\iiint_V dV = V$.

Y como V es una esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Por lo tanto

$$\iiint_V \text{div}\vec{F} dV = \frac{3k}{R^3} V = \frac{3k}{R^3} \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right) = 4\pi k \quad (33)$$

Cuyo resultado es igual al obtenido utilizando la definición de flujo (ec. 26).

Trabajo realizado por el campo gravitatorio de la Tierra

El trabajo realizado por el campo gravitacional sobre cualquier objeto dispuesto en su superficie puede evaluarse mediante la integral de línea

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (34)$$

donde: $\vec{F}$ el campo gravitacional, mientras que $d\vec{r}$ es la diferencial de la función posición.

Conviene expresar el campo en su forma paramétrica, para ello, sustituyendo las ec. (1), (2) y (3) en la ec. (21)



$$\vec{F}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = \frac{k}{R^3} (R \operatorname{sen}\theta \cos\theta \hat{i} + R \operatorname{sen}\theta \cos\theta \hat{j} + R \cos\theta \hat{k}) \quad (35)$$

El movimiento de todo objeto fijo sobre la superficie de la Tierra en el Ecuador, es resultado del movimiento de rotación de la Tierra y describe una trayectoria circular igual al perímetro de la Tierra en el Ecuador, la cual, como se mostró anteriormente (§ 1.1) puede ser descrita mediante la función posición

$$\vec{r}(\theta) = R \cos\theta \hat{i} + R \operatorname{sen}\theta \hat{j}, \text{ donde } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4)$$

Luego, la diferencial de la función posición es

$$d\vec{r} = -R \operatorname{sen}\theta \hat{i} + R \cos\theta \hat{j} + 0 \hat{k} \quad (36)$$

Y el producto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ es

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \frac{k}{R^3} (R \operatorname{sen}\theta \cos\theta \hat{i} + R \operatorname{sen}\theta \cos\theta \hat{j} + R \cos\theta \hat{k}) \cdot (-R \operatorname{sen}\theta \hat{i} + R \cos\theta \hat{j} + 0 \hat{k}) \\ &= \frac{k}{R^3} R^2 (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\theta + 0) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Sustituyendo el resultado (ec.37) en la ec. (34), se concluye que

$$W = \iint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint 0 \cdot d\vec{r} = 0 \quad (38)$$

Lo que implica que la Tierra no emplea ningún trabajo y por lo tanto no gasta ninguna energía para llevar sobre ella todos los objetos que porta. O en forma más rigurosa, ello implica que el flujo gravitatorio no influye en la rotación de la Tierra, ¡y que esta no necesita energía para girar sobre su propio eje (!!!)

Circulación resultante del campo gravitatorio de la Tierra

La circulación se define como la integral

$$\iint_R \vec{\operatorname{rot}} \vec{F} \cdot \vec{N} dS \quad (39)$$

Para calcular la circulación primero se tiene que calcular el rotacional del campo vectorial $\vec{\operatorname{rot}} \vec{F}$ y el producto $\vec{N} ds$.



Por definición

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{r}_\phi(\phi, \theta) \times \vec{r}_\theta(\phi, \theta) \quad (40)$$

De acuerdo al Calculo Vectorial, si

$$\vec{F}(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k} \quad (27)$$

por definición el rotacional de un campo vectorial es el producto vectorial

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

Nuevamente, por analogía de la ec. (21) con la ec. (28) es evidente que

$$M = \frac{k}{R^3} x; \quad N = \frac{k}{R^3} y; \quad y \quad P = \frac{k}{R^3} z \quad (29)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{F} &= \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{k}{R^3}(x) & \frac{k}{R^3}(y) & \frac{k}{R^3}(z) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{k}{R^3} (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = \vec{0} \end{aligned} \quad (42)$$

Por otro lado el producto $\vec{N}ds$ está dado por la ec. (23), pero independientemente de su valor, dado que el rotacional es cero, sustituyendo en la ec. (39)

$$\iint_R \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{N}ds = 0 \quad (43)$$

Lo que significa que el rotacional del campo gravitacional de la Tierra es cero. En realidad, la fórmula de la circulación es equivalente a la fórmula del trabajo para una trayectoria cerrada; es decir es otra forma de definir las integrales de línea. Esto lo establece el *Teorema de Stokes*



$$\iint_R \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot N dS = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (44)$$

Lo que implica que las integrales de línea no solo permiten calcular el trabajo, sino también la circulación. Y en el caso de los campos cuadráticos inversos en una trayectoria cerrada, los cuales son conservativos o irrotacionales, tanto el trabajo como la circulación son cero.

CONCLUSIONES

Se ejemplifica el uso de las ecuaciones paramétricas, de línea y de superficie, para demostrar su utilidad en la descripción geométrica de la Tierra. Utilizando las Integrales del Línea y el Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss, se calcula el flujo gravitacional y se demuestra que la Tierra no requiere ningún trabajo para portar todos o cualquier objeto que permanezca sobre su superficie. Finalmente, utilizando integrales de línea y el Teorema de Stokes se demuestra que la circulación de campo gravitacional de la Tierra es cero, lo que evidencia la inercia en la rotación de la Tierra. En virtud de que los campos gravitacionales son conservativos, esta conclusión puede extenderse a cualquier planeta o astro del universo. Y este tratamiento puede extenderse a los campos eléctricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics* (3rd ed.). Wiley.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.
- Larson, R., Hostetler, R. P., & Edwards, B. H. (2006). *Cálculo* (9.^a ed., pp. 1053–1132). McGraw-Hill.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7.^a ed., pp. 873–912). Oxford University Press.
- Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). *Vector calculus* (6th ed.). W. H. Freeman & Company.
- Morin, D. (2008). *Introduction to classical mechanics: With problems and solutions*. Cambridge University Press.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2014). *Physics for scientists and engineers* (9th ed.). Cengage Learning.



Stewart, J. (2016). *Calculus: Early transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.

Thomas, G. B., & Finney, R. L. (1992). *Calculus and analytic geometry* (8th ed., pp. 973–1041). Addison-Wesley.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2008). *Physics for scientists and engineers* (6th ed.). W. H. Freeman.

